BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2008**

MEXANİKA

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М.Ф.МЕХТИЕВ, Н.И.ФОМИНА
Бакинский Государственный Университет

Как известно, в задачах теории упругости большой интерес представляет оценка роли граничных условий в формировании спектра краевых задач. В работах [1,2] исследованы задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра. Ниже рассматривается задача теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра при смешанных условиях на боковой поверхности. Относительно собственных значений задачи получены трансцендентные уравнения. Детально изучены корни характеристических уравнений.

Исследование собственных значений позволило установить существенные особенности напряженно-деформированного состояния анизотропной оболочки по сравнению с изотропными оболочками. Построены однородные решения.

1. Пусть цилиндр занимает объем

$$\Gamma = \{r \in [R_1, R_2],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [-l, l]\}$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид [1] :

$$\begin{gathered}
b_{11}\left(\Delta_0 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho}\right) + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \xi^2} + (1+b_{13})\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho \partial \xi} = 0 \\
(1+b_{13})\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho}\right) + \Delta_0 u_\xi + b_{33}\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} = 0
\end{gathered}, \qquad \textbf{(1.1)}$$

здесь

$$\rho = R_0^{-1}\cdot r,\ \ \xi = R_0^{-1}\cdot z,\ \ u_\rho = R_0^{-1}\cdot u_r,\ \ u_\xi = R_0^{-1}\cdot u_z \ ,$$

$R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ - радиус срединной поверхности оболочки,

$$mb_{11} = 2G_0(1-\nu_1\nu_2),\ mb_{13} = 2G_0\nu_1(1+\nu),\ mb_{33} = 2G_0\left(1-\nu^2\right),$$

$b_{12} = b_{11} - 2G_0,\ E_0 = E_1 \cdot E^{-1},\ G_0 = G\cdot G_1^{-1},\ \nu_2 = E_0\cdot \nu_1, m = 1-\nu-2\nu_1\nu_2$ - безразмерные величины, E, G, ν - материальные константы изотропии, E_1, G_1, ν_1 - материальные константы в плоскости, перпендикулярной к плоскости изотропии.

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= G_1\left(b_{11}\varepsilon_r + b_{12}\varepsilon_\varphi + b_{13}\varepsilon_z\right)\\
\sigma_\varphi &= G_1\left(b_{12}\varepsilon_r + b_{11}\varepsilon_\varphi + b_{13}\varepsilon_z\right)\\
\sigma_z &= G_1\left[b_{12}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi\right) + b_{33}\varepsilon_z\right]\\
\tau_{rz} &= G\varepsilon_{rz}
\end{aligned}, \tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \rho} \quad .$$

Предположим, что на боковой поверхности цилиндра заданы граничные условия

$$u_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \ \text{ при } \ r = r_s \ (s = 1,2). \tag{1.3}$$

Характер граничных условий на торцах цилиндра пока уточнять не будем, однако будем считать их таковыми, что цилиндр находится в равновесии.

Решение (1.1), (1.3) будем искать в виде:

$$u_\rho = u(\rho)\frac{dm}{d\xi}, \quad u_\xi = W(\rho)m(\xi) \ , \tag{1.4}$$

где функция $m(\xi)$ подчинена условию

$$\frac{d^2 m}{d\xi^2} - \mu^2 m(\xi) = 0 \ . \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), с учетом (1.5), получаем следующую краевую задачу

$$\begin{aligned}
&b_{11}\left(u' + \frac{u}{\rho}\right)' + \mu^2 u + (1 + b_{13})W' = 0\\
&(1 + b_{13})\mu^2\left(u' + \frac{u}{\rho}\right) + W'' + \frac{1}{\rho}W' + b_{33}\mu^2 W = 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$u = 0, \quad \mu^2 u + W' = 0 \ \text{ при } \ \rho = \rho_s \tag{1.7}$$

Общее решение (1.6) имеет вид:

$$\begin{aligned}
u(\rho) &= \left(b_{33}\mu^2 - \alpha_1^2\right)Z_1(\alpha_1\rho) + \left(b_{33}\mu^2 - \alpha_2^2\right)Z_1(\alpha_2\rho)\\
W(\rho) &= -(b_{13} + 1)\mu^2\left[\alpha_1 Z_0(\alpha_1\rho) + \alpha_2 Z_0(\alpha_2\rho)\right]
\end{aligned}, \tag{1.8}$$

здесь $Z_k(\rho) = C_1 J_k(\rho) + C_2 Y_k(\rho)$, функции $J_k(\rho)$, $Y_k(\rho)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения Бесселя, C_1, C_2 - произвольные постоянные.

$\alpha_n = \sqrt{t_n}$, t_n - корни квадратного уравнения

$$\begin{aligned}
&t^2 - 2q_1\mu^2 t + q_2\mu^4 = 0; \quad q_1 = \frac{\nu_1}{\nu_2}(1 - \nu_1\nu_2)^{-1}(1 + \nu)(G_o - \nu_2)\\
&q_2 = \frac{\nu_1}{\nu_2}(1 - \nu_1\nu_2)^{-1}\left(1 - \nu^2\right), \quad \alpha_n = \mu s_n, \ s_n = \left[q_1 + (-1)^n\sqrt{q_1^2 - q_2}\right]^{1/2}
\end{aligned} . \tag{1.9}$$

Удовлетворяя однородным граничным условиям (1.7), получаем характеристическое уравнение

$$\Delta(\mu,\rho_1,\rho_2)=b_{33}\mu^4\left(s_2^1-s_1^2\right)^2 L_{11}(\alpha_1\rho_1,\,\alpha_1\rho_2)L_{11}(\alpha_2\rho_1,\,\alpha_2\rho_2)=0\,, \quad \mathbf{(1.10)}$$

где

$$L_{11}(\alpha x,\alpha y)=J_1(\alpha x)\cdot Y_1(\alpha y)-J_1(\alpha y)\cdot Y_1(\alpha x)\,.$$

Трансцендентное уравнение (1.10) определяет счетное множество корней μ_k, а соответствующие им постоянные $c_{1n},c_{2n},c_{3n},c_{4n}$ пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки определителя системы. Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, решения системы (1.1) можно представить в виде:

$$u_\rho=\sum_{n=1}^{\infty}C_nU_n(\rho)\frac{dm_n}{d\xi}\,,\qquad u_\xi=\sum_{n=1}^{\infty}C_nW_n(\rho)m_n(\xi) \quad \mathbf{(1.11)}$$

где C_n - произвольные постоянные.

$$U_n(\rho)=\left[\alpha_1^4\left(b_{33}\mu_n^2-\alpha_2^2\right)^2-\alpha_1^2\alpha_2^2\left(b_{33}\mu_n-\alpha_1^2\right)\left(b_{33}\mu_n-\alpha_2^2\right)\right]\times$$
$$\times L_{11}(\alpha_2\rho,\,\alpha_2\rho_2)L_{11}(\alpha_1\rho_1,\,\alpha_1\rho_2)+\left[\alpha_2^4\left(b_{33}\mu_n^2-\alpha_1^2\right)^2-\right.$$
$$\left.-\alpha_1^2\alpha_2^2\left(b_{33}\mu_n-\alpha_1^2\right)\left(b_{33}\mu_n-\alpha_2^2\right)\right]L_{11}(\alpha_1\rho,\,\alpha_1\rho_2)L_{11}(\alpha_2\rho_1,\,\alpha_2\rho_2)$$

$$W_n(\rho)=-(b_{13}+1)\left\{\alpha_1\left[\alpha_2^4\left(b_{33}\mu_n-\alpha_1^2\right)-\alpha_1^2\alpha_2^2\left(b_{33}\mu_n-\alpha_2^2\right)\right]\times\right.$$
$$\times L_{01}(\alpha_1\rho,\,\alpha_1\rho_2)L_{11}(\alpha_2\rho_1,\,\alpha_2\rho_2)+\alpha_2\left[\alpha_1^4\left(b_{33}\mu_n-\alpha_2^2\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\alpha_1^2\alpha_2^2\left(b_{33}\mu_n-\alpha_1^2\right)L_{01}\left(\alpha_2\rho,\,\alpha_2\rho_2\right)\right]L_{11}(\alpha_1\rho_1,\,\alpha_1\rho_2)\right\}$$

Что касается напряжений, то их можно определить с помощью обобщенного закона Гука.

2. Левая часть уравнения (1.10), как целая функция параметра μ , имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности. Для эффективного изучения его нулей предположим, что оболочка тонкостенная.

Положим

$$\rho_1=1-\varepsilon,\;\; \rho_2=1+\varepsilon,\;\; \varepsilon=(2R_0)^{-1}(R_2-R_1),\quad \rho=1+\varepsilon\eta,\;\; -1\le\eta\le1\,. \quad \mathbf{(2.1)}$$

Считаем, что ε - малый параметр. Подставляя (2.1) в (1.10), получаем

$$D(\mu,\varepsilon)=\Delta(\mu,\rho_1,\rho_2)=0 \quad \mathbf{(2.2)}$$

Уравнение (2.1) имеет один ограниченный корень $\mu=0$. Из (1.11) получаем, что этому корню соответствует следующее решение

$$u_\rho=0;\quad u_\xi=m\left[G_0(1+\nu)\right]^{-1}C_0\xi;$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_r=G_1\nu_1C_0;\quad \sigma_z=(1-\nu)G_1C_0,\quad \tau_{rz}=0 \quad \mathbf{(2.3)}$$

C_0 - произвольная постоянная.

Напряженное состояние, соответствующее нулю $\mu=0$ эквивалентно главному вектору усилий P , направленному вдоль оси цилиндра.

$$P=\pi(1-\nu)G_1C_o\left(R_2^2-R_1^2\right)$$

Отсюда

$$C_0 = P\left[\pi(1-\nu)G_1\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right]^{-1}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Докажем, что характеристическое уравнение при $\varepsilon \to 0$ других ограниченных корней не имеет. Для этой цели разложим $D(\mu,\varepsilon)$ в ряд по ε и ограничимся только первыми членами разложения. Получим

$$D(\mu,\varepsilon) = 16\mu^4\left(s_2^2 - s_1^2\right)^2 \cdot \pi^{-2} \cdot \varepsilon^2[1+O(\varepsilon)]. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Отсюда видно, что характеристическое уравнение не имеет других ограниченных корней кроме $\mu = 0$. Таким образом, все остальные корни характеристического уравнения стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

В принципе здесь возможны следующие предельные случаи:

1) $\varepsilon\mu_k \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; **2)** $\varepsilon\mu_k \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$; **3)** $\varepsilon\mu_k \to const$ при $\varepsilon \to 0$.

Как и в работе [1], можно доказать, что случаи 1 и 2 здесь не осуществимы. В третьем случае отыскиваем μ_n в виде

$$\mu_n = \varepsilon^{-1} \cdot \delta_n + 0(\varepsilon) \qquad (n = 1,2,...) \qquad \textbf{(2.6)}$$

Как и в работе [1], здесь возможны следующие случаи:

1. $\mu_{1,2} = \pm s_1\delta_n, \ \ \mu_{3,4} = \pm s_2\delta_n, \ \ q_1 > 0, \ \ q_1^2 - q_2 > 0, \ \ s_1^2 = \delta_n^2\tau_i \ \ (i = 1,2)$

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \chi + i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2.$$

2. Корни характеристического уравнения (1.9) кратные.

$$\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm\delta_n \cdot p \quad q_1 > 0 \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}$$

3. $\mu_{1,2} = \pm is_1\delta_n, \ \ \mu_{3,4} = \pm is_2\delta_n, \ \ q_1 < 0, \ \ q_1^2 - q_2 \neq 0$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| + \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

4. $\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm i\delta_n p, \ \ q_1 < 0, \ \ q_1^2 - q_2 = 0, \ \ p = \sqrt{|q_1|}$.

В случаях 1, 2 после подстановки (2.6) в (1.9) и преобразования его с помощью разложений в ряд по ε получаем

$$\boldsymbol{cos}(s_2 + s_1)\delta_n \pm \boldsymbol{cos}(s_2 - s_1)\delta_n = 0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$\boldsymbol{cos}\,2p\delta_n \pm 1 = 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

$$ch2x\delta_n \pm \boldsymbol{cos}\,2\beta\delta_n = 0. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой s_1, s_2 на is_1, is_2, p на ip. Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Вена в теории анизотропной упругости для слоя.

В таблице приведены значения коэффициентов q_1, q_2 для некоторых материалов.

	магний	кадмий	цинк
q_1	*1,276*	*0,725*	*0,281*
q_2	*1,032*	*0,425*	*0,378*
$q_1^2 - q_2$	*0,595*	*0,101*	*-0,299*

3. Приведем теперь первые члены асимптотических разложений решения, соответствующего различным группам корней. Для перемещений и напряжений, в первом приближении, получаем два класса решений, первый из которых соответствует нулям

$$\cos(s_2+s_1)\delta_n+\cos(s_2-s_1)\delta_n,\quad \cos 2p\delta_n+1,\ ch2x\delta_n+\cos 2\beta\delta_n,$$

а второй – нулям функции

$$\cos(s_2-s_1)\delta_n-\cos(s_2-s_1)\delta_n,\quad \cos 2p\delta_n-1,\ ch2x\delta_n-\cos 2\beta\delta_n,$$

соответственно, имеем

$$u_{\rho 0}=\varepsilon\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}C_n\left[s_2^2\left(b_{33}-s_1^2\right)\cos s_2\delta_n\cdot\cos s_1\delta_n\eta-s_1^2\cos s_1\delta_n\cdot\cos s_2\delta_n\eta+0(\varepsilon)\right]\frac{dm_n}{d\xi}$$

$$u_{\xi 0}=(b_{13}+1)s_1s_2\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}C_n\delta_n[s_2\cos s_2\delta_n\cdot\sin s_1\delta_n\eta-s_1\cos s_1\delta_n\cdot\sin s_2\delta_n\eta+0(\varepsilon)]m_n(\xi)$$

$$\begin{gathered}\sigma_{r0}=G_1s_1s_2\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}C_n\delta_n\left[s_2\left(b_{13}^2+b_{13}-b_{11}b_{33}+b_{11}s_1^2\right)\cos s_2\delta_n\cdot\sin s_1\delta_n\eta-\right.\\ \left.-s_1\left(b_{13}^2+b_{13}-b_{11}b_{33}+b_{11}s_2^2\right)\cos s_1\delta_n\cdot\sin s_2\delta_n\eta+0(\varepsilon)\right]\frac{dm_n}{d\xi}\end{gathered}\qquad\textbf{(3.1)}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\varphi 0}=G_1s_1s_2\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}C_n\delta_n\left[s_2\left(b_{13}^2+b_{13}-b_{12}b_{33}+b_{12}s_1^2\right)\cos s_2\delta_n\cdot\sin s_1\delta_n\eta-\right.\\ \left.-s_1\left(b_{13}^2+b_{13}-b_{12}b_{33}+b_{12}s_2^2\right)\cos s_1\delta_n\cdot\sin s_2\delta_n\eta+0(\varepsilon)\right]\frac{dm_n}{d\xi}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{z0}=G_1s_1s_2\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}C_n\delta_n\left[s_2\left(b_{13}b_{33}+b_{33}-b_{12}b_{33}+b_{12}s_1^2\right)\cos s_2\delta_n\cdot\sin s_1\delta_n\eta-\right.\\ \left.-s_1\left(b_{13}b_{33}+b_{33}-b_{12}b_{33}+b_{12}s_2^2\right)\cos s_1\delta_n\cdot\sin s_1\delta_n\eta+0(\varepsilon)\right]\frac{dm_n}{d\xi}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\tau_{rz0}=G\cdot\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}C_n\delta_n^2\left[s_2^2\left(b_{13}s_1^2+b_{33}\right)\cos s_2\delta_n\cdot\cos s_1\delta_n\eta-\right.\\ \left.-s_1^2\left(b_{13}s_2^2+b_{33}\right)\cos s_1\delta_n\cdot\cos s_2\delta_n\eta+0(\varepsilon)\right]m_n(\xi)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}u_{\rho 0}=\varepsilon\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}B_n\{p[p\delta_n(b_{13}+1)\sin\rho\delta_n-(b_{13}+2)\cos p\delta_n]\cos p\delta_n\eta-\\ -(b_{13}+1)p^2\delta_n\cdot\eta\cos p\delta_n\cdot\sin p\delta_n\eta+0(\varepsilon)\Big]\frac{dm_n}{d\xi}\end{gathered}$$

$$u_{\xi 0}=(b_{13}+1)p\sum_{n=1,3,...}^{\infty}\left[C_n\delta_n\left\{\left[\boldsymbol{sin}\,p\delta_n+\frac{\boldsymbol{cos}\,p\delta_n}{p\delta_n(b_{13}+1)}\right]\boldsymbol{sin}\,p\delta_n\eta+\right.\right.$$

$$+\eta\,\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\cdot\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\eta+0(\varepsilon)\}m_n(\xi)$$

$$\sigma_{r0}=G_1\sum_{n=1,3,...}^{\infty}B_n\{[(b_{13}+1)p\delta_n\left(b_{13}-b_{11}p^2\delta_n\right)sinp\delta_n+\left(b_{13}+b_{11}p^2\delta_n\right)cosp\delta_n\Big]\times$$

$$\times\,sinp\delta_n\eta+(b_{13}+1)\left(b_{13}-b_{11}p^2\delta_n\right)\cdot\eta\cos p\delta_n cosp\delta_n\eta+0(\varepsilon)\}\frac{dm_n}{d\xi} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$\sigma_{\varphi 0}=G_1\sum_{n=1,3,...}^{\infty}C_n\{[(b_{13}+1)p\delta_n\left(b_{13}-b_{12}p^2\delta_n\right)sinp\delta_n+\left(b_{13}+b_{12}p^2\delta_n\right)]\times$$

$$\times\,sinp\delta_n\eta+(b_{13}+1)\left(b_{13}-b_{12}p^2\delta_n\right)\cdot\eta cosp\delta_n\cdot cosp\delta_n\eta+0(\varepsilon)\}\frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\sigma_{z0}=G_1\sum_{n=1,3,...}^{\infty}B_n\{[(b_{13}+1)p\delta_n\left(b_{33}-b_{12}p^2\delta_n\right)\boldsymbol{sin}\,p\delta_n+\left(b_{33}+b_{12}p^2\delta_n\right)\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\Big]\times$$

$$\times\,\boldsymbol{sin}\,p\delta_n\eta+(b_{13}+1)\left(b_{33}-b_{12}p^2\delta_n\right)\cdot\eta\,\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\cdot\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\eta+0(\varepsilon)\}\frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\tau_{rz0}=\frac{2G(b_{13}+1)}{\varepsilon}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}B_n\left[\delta_n^3(\boldsymbol{sin}\,p\delta_n\cdot\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\eta-\eta\,\boldsymbol{cos}\,p\delta_n\cdot\boldsymbol{sin}\,p\delta_n\eta)+0(\varepsilon)\right]m_n(\xi)$$

Выражения для $n=2,4,6,...$ получаются из формул (3.1), (3.2) заменой $\boldsymbol{cos}\,x$ на $\boldsymbol{sin}\,x$ и $\boldsymbol{sin}\,x$ на $-\boldsymbol{cos}\,x$, соответственно.

$$u_{\rho 0}=\varepsilon\sum_{n=1,3,...}^{\infty}D_n\left\{\left[\left(b_{33}+\beta^2-\chi^2\right)cos\beta\delta_n\eta\,ch\chi\delta_n\eta+2\chi\beta sin\beta\delta_n\eta\cdot sh\chi\delta_n\eta\right)\Delta_{1n}-\right.$$

$$-\left[\left(b_{33}+\beta^2-\chi^2\right)sin\beta\delta_n\eta\,sh\delta_n\eta-2\chi\beta cos\beta\delta_n\eta\cdot ch\chi\delta_n\eta\right)\Delta_{2n}+0(\varepsilon)\}\frac{dm_n}{d\xi}$$

$$u_{\xi 0}=(b_{13}+1)\sum_{n=1,3,...}^{\infty}D_n[(\beta\,\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n\eta\,ch\chi\delta_n\eta-\chi\,\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n\eta\cdot sh\chi\delta_n\eta)\Delta_{1n}+$$

$$+(\chi\,\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n\eta ch\chi\delta_n\eta+\beta\,\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n\eta\,sh\chi\delta_n\eta)\Delta_{2n}+0(\varepsilon)]m_n(\xi)$$

$$\sigma_{r0}=G_1\sum_{n=1,3,...}^{\infty}D_n[b_{11}F'_{n1}(\eta)+b_{13}F_{n2}(\eta)+0(\varepsilon)]\frac{dm_n}{d\xi} \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$\sigma_{\varphi 0}=G_1\sum_{n=1,3,...}^{\infty}D_n[b_{12}F'_{n1}(\eta)+b_{13}F_{n2}(\eta)+0(\varepsilon)]\frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\sigma_{z0}=G_1\sum_{n=1,3,...}^{\infty}D_n[b_{12}F'_{n1}(\eta)+b_{33}F_{n2}(\eta)+0(\varepsilon)]\frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\tau_{rz0}=\frac{G}{\varepsilon}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}D_n\left[\delta_n^2F_{1n}(\eta)+F'_{n2}(\eta)+0(\varepsilon)\right]m_n(\xi),$$

где

$$F_{n1}(\eta)=\left[\left(b_{33}+\beta^2-\chi^2\right)\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n\eta\,ch\chi\delta_n\eta+2\chi\beta\,\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n\eta\,sh\chi\delta_n\eta\ \right)\Delta_{1n}-$$

$$-\left[\left(b_{33}+\beta^2-\chi^2\right)\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n\eta\,sh\chi\delta_n\eta-2\chi\beta\,\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n\eta\,ch\chi\delta_n\eta\ \right)\Delta_{2n}$$

$$F_{n2}(\eta)=\left(\beta\,\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n\eta\,ch\chi\delta_n\eta-\chi\,\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n\eta\,sh\chi\delta_n\eta\ \right)\Delta_{1n}+$$

$$+\left(\chi\,\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n\eta\,ch\chi\delta_n\eta+\beta\,\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n\eta\,sh\chi\delta_n\eta\ \right)\Delta_{2n}$$

$$\Delta_{1n}=-\left[b_{33}+(b_{13}+2)\left(\beta^2-\chi^2\right)\right]\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n sh\chi\delta_n+2\chi\beta(b_{13}+2)\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n ch\chi\delta_n$$

$$\Delta_{2n}=-\left[b_{33}+(b_{13}+2)\left(\beta^2-\chi^2\right)\right]\boldsymbol{cos}\,\beta\delta_n ch\chi\delta_n-2\chi\beta(b_{13}+2)\boldsymbol{sin}\,\beta\delta_n sh\chi\delta_n$$

Выражения для $n=2,4,6,...$ получаются из (3.3) простой заменой $ch\chi\leftrightarrow sh\chi$;

C_n, B_n, D_n - произвольные постоянные.

Отметим, что решение (3.3) характерно только для анизотропных оболочек. При переходе к изотропной оболочке $(G_0=1)$ оно полностью исчезает. Что касается решений (3.1) и (3.2) при $G_0=1$ они сливаются в одно, и это решение совпадает с решением Сен-Венана для изотропной плиты.

В работе [1] доказано обобщенное условие ортогональности однородных решений для трансверсально-изотропного полого цилиндра, которое позволяет точно удовлетворить граничным условиям на торцах при специальных условиях опирания края оболочки.

С помощью обобщенных условий ортогональности рассмотрим следующую задачу: пусть на боковой поверхности цилиндра выполняется условие (1.3), а на торцах заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_z=\lambda\left(1-c\eta^2\right),\quad u_r=0\ \text{ при }\ \xi=\pm\ell_0,$$

$2\ell_0$ - безразмерная высота цилиндра.

Согласно (3.1) $u_r, u_z, \sigma_r, \tau_{rz}$ можно представить в виде

$$u_r=\sum_{n=1}^{\infty}C_n u_n(\eta)\frac{dm_n}{dz}\qquad u_z=\sum_{n=1}^{\infty}C_n W_n(\eta)m_n(z)$$

$$\sigma_z=\sum_{n=1}^{\infty}C_n Q_n(\eta)\frac{dm_n}{dz}\qquad \tau_{rz}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n T_n(\eta)m_n(z)\qquad \textbf{(3.4)}$$

В рядах (3.4) суммирование ведется по корням μ_n, расположенным в верхней полуплоскости $(\boldsymbol{Im}\,\mu_n>0)$. В силу соотношений обобщенной ортогональности, искомые постоянные C_n имеют вид:

$$C_n=-\lambda\Delta_n^{-1}ch\mu_k\ell_0\int_{-1}^{1}\left(1-c\eta^2\right)W_n(\eta)d\eta$$

$$\Delta_n=\int_{-1}^{1}\left[u_n(\eta)T_n(\eta)-Q_n(\eta)W_n(\eta)\right]d\eta\ .$$

Постоянная C_0 определяется формулой (2.4).

В общем случае краевая задача сводится к решению систем линейных бесконечных алгебраических уравнений с помощью вариационного принципа Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maksudov F.G., Mekhtiev M.F., Sadikov P.M. Construction of homogeneous solutions for a transversally – isotropic hollow cylinder. Proceedings of IMM of Azerbaijan AS, 1999, vol. X, p. 199-209.
2. Магсудов Ф.Г., Мехтиев М.Ф., Садыхов П.М. Асимптотическая теория для трансверсально-изотропного полого цилиндра. Труды V Международной Конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону: 2000, т.2, с.134-139.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, 1973, т.2, 296 с.

TRANSVERSAL-İZOTROP SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN YAN SƏTHİNDƏ QARIŞIQ SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ VERİLDİKDƏ BİRCİNS HƏLLƏRİN QURULMASI

M.F.MEHDİYEV, N.İ.FOMİNA

XÜLASƏ

Transversal - izotrop silindrik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılır. Öptüyün yan səthində bircins qarışıq sərhəd şərtlərini ödətməklə məxsusi ədədlərə nəzərən xarakteristik tənlik alınmışdır. Xarakteristik tənliyin köklərinin asimptotikası verilmişdir.

Anizotrop örtük üçün gərginlik vəziyyətin izotrop örtük üçün gərginlik vəziyyətdən kəskin fərqləndiyi göstərilmişdir.

THE FORMATION OF THE HOMOGENEOUS SOLUTIONS FOR THE TRANSVERSIVE –ISOTROPIC HOLLOW CYLINDER WITHIN THE DISPLACED CONDITIONS ON THE COLLATERAL SURFACE

M.F.MEKHTIYEV, N.I.FOMINA

SUMMARY

Here is being considered the problem of the theory of elasticity for the transversive-isotropic hollow cylinder within the displaced homogeneous conditions on the collateral surface. Relatively to personal significance of the problem obtained some characteristic equation. Thoroughly learned the roots of the characteristically equations. The research of the personal meaning allowed to establish some considerable peculiarities of the strained-deformed state of anisotropic cover in comparison with the isotropic covers, and the homogeneous decisions were being formed as well.